Chapitre 8 : Intégrales généralisées

Exercice 1. ♪

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

Exercice 2. ♪

On considère $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

1. Montrer que I est convergente.
2. À l'aide du changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ montrer que $2I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 3. ♪

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\ln(1+t^2)}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'. Étudier les variations de f.
3. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 4. ♪

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

1. I est-elle convergente ?
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, calculer $J_\varepsilon = \displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ en remarquant que $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ et en faisant un changement de variable.
3. Calculer I.

Exercice 5. (Agro 2018 extrait)

Pour tout $x \in]0,1]$, on pose :

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $h(x)$ est bien définie, pour tout $x \in]0,1]$.
2. Montrer que h est constante sur $]0,1]$ et plus précisément que, pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$h(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

3. Calculer la valeur de h sur $]0,1]$. *On pourra faire le changement de variable $y = \sin^2(u)$.*

Exercice 6.

On souhaite calculer la valeur de l'intégrale de Fresnel :

$$F = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

dont on a montré dans le cours qu'elle est convergente mais pas absolument convergente.

1. On aura besoin du Lemme de Riemann-Lebesgue qui s'énonce de la façon suivante : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on a
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = 0$$
Démontrer ce lemme en faisant une intégration par partie.
2. Soit $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$ définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'elle est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$$
Montrer que ces intégrales sont convergentes.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n - J_n = 0$.
5. En effectuant un changement de variable, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = F$.
6. En s'intéressant aux quantités $J_n - J_{n-1}$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de J_n.
7. En déduire la valeur de F.

Exercice 7. Comparaison séries-intégrales

1. Soient F une fonction croissante et continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ et (x_n) une suite de réels incluse dans $[a, +\infty[$ strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si la suite $(F(x_n))$ converge.
2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right)$ est convergente.
   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.
3. Un exemple. Soit $a > 0$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-a\sqrt{n}}$ converge. on note $S(a)$ sa somme.
   (c) Montrer que $S(a) - 1 \leq \dfrac{2}{a^2} \leq S(a)$. En déduire un équivalent de $S(a)$ quand a tend vers 0.

Exercice 8. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente et que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$$

Indications

- Exercice 2 : pour calculer $2I = I + I$ on somme les deux formes différentes de l'intégrale.
- Exercice 4 : 1) réduire au même dénominateur et faire un DL. 3) On introduit $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \dots$ qu'on découpe avec J_ε puis on passe à la limite en faisant tendre ε vers 0.
- Exercice 5 : 2) faire un changement de variable affine en réfléchissant sur les bornes.
- Exercice 7 : 1) avec des epsilons pour la sens réciproque. 2)a) refaire un raisonnement de comparaison série-intégrale.
- Exercice 8 : pour $x \in [a, b[$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pourra introduire le polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^x (\lambda|f(t)| + |g(t)|)^2 \, \mathrm{d}t$ et s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.