Chapitre 5 : Variables aléatoires réelles

1 Généralités sur les variables aléatoires réelles

1.1 Définition d'une variable aléatoire

Définition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire réelle sur** $(\Omega, \mathcal{T})$, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{T}$$

Remarques

1. Une variable aléatoire est donc une application (et pas une variable) et elle n'est pas aléatoire !
2. Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ (ce qui sera le cas pour nous si Ω est fini ou dénombrable) alors toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

Proposition 1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \in I\}$ est un événement qu'on notera $(X \in I)$.
En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \in \{a\}\}$ est un événement qu'on notera $(X = a)$.

1.2 Fonction de répartition

Définition 2. Soit X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de X l'application définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, 1]$:

$$F_X : x \mapsto P(X \leq x)$$

Théorème 1. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X réelle est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \ \text{ et } \ \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

Proposition 2. Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.

- F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$$

- Pour la limite à gauche :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - P(X = a) = P(X < a)$$

- F_X est continue en a si et seulement si $P(X = a) = 0$.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Définition

Définition 3. On dit qu'une variable aléatoire est **discrète** si son image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable.

Remarques

1. Si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, X est une variable aléatoire discrète si et seulement si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $a \in X(\Omega)$, $(X = a)$ est un événement.
2. Si Ω est fini ou dénombrable, si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ alors toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète.

Proposition 3. Construction de variables aléatoires discrètes
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(X_1, \ldots, X_n)$ est une variable aléatoire discrète.
En particulier :

- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes alors $\min(X_1, \ldots, X_n)$ et $\max(X_1, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes.
- Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes alors $X + Y, XY$ et $\lambda X + \mu Y$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$ sont des variables aléatoires discrètes.
- Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et si $\varphi : A \to \mathbb{R}$ est une application, alors $\varphi(X) = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire discrète.

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Proposition 4. Soit X une variable aléatoire discrète. Si on note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$. Alors la famille des événements $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

Définition 4. Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
L'application $P_X : X(\Omega) \to [0, 1]$ définie par

$$\forall x \in X(\Omega),\ P_X(x) = P(X = x)$$

est appelée **loi de probabilité** (ou encore distribution) de X.

Attention Deux variables aléatoires discrètes peuvent avoir la même loi sans être égales.

Proposition 5.

- Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ alors

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

- Réciproquement, soit E une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ et $(p_i)_{i \in E}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i \in E} p_i = 1$. Il existe au moins un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = E$ et, pour tout $i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = p_i$.

2.3 Loi et fonction de répartition

Proposition 6. Soit X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ de fonction de répartition F_X. On a
- Pour tout $a \notin X(\Omega)$, F_X est continue en a.
- F_X est une fonction croissante en escaliers.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\sum_{y \in X(\Omega), y \leq x} P(X = y)$

Théorème 2. Soit X une variable aléatoire discrète. Sa fonction de répartition, F_X, détermine uniquement sa loi. Plus précisément :
- L'image de X est l'ensemble des abscisses où F_X admet des discontinuités.
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = F_X(x) - \displaystyle\lim_{t \to x^-} F_X(t)$ i.e. la « hauteur du saut que fait F_X en x ».

Proposition 7. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a

$$P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$$

3 Moments d'une variable aléatoire réelle

Dans ce paragraphe toutes les variables aléatoires sont réelles et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. **Les résultats sont énoncés et démontrés dans le cas des variables aléatoires discrètes mais les résultats marqués $*$ sont valables pour des variables aléatoires réelles quelconques.**

3.1 Espérance

Définition 5. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si la somme $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ existe et est finie, on dit que X admet une **espérance** et on note $E(X)$ cette quantité.
Plus précisément :
- Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini, alors X admet toujours une espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

- Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\sum x_i P(X = x_i)$ est **absolument convergente**, alors X admet une espérance qui est :

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P(X = x_i)$$

Attention Une variable aléatoire peut ne pas avoir d'espérance.

Remarque L'hypothèse de convergence absolue permet de s'assurer que la définition de l'espérance ne dépend pas de la façon d'ordonner les éléments de l'image de la variable aléatoire.

Proposition 8. Une autre expression de l'espérance
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un univers Ω qu'on suppose dénombrable. X admet une espérance si et seulement si la somme suivante est absolument convergente et alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Théorème 3. Linéarité de l'espérance $*$
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y admettent une espérance, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $X + Y$ et λX admettent une espérance. Et :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et } E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

Définition 6. On dit qu'une variable aléatoire réelle admettant une espérance nulle est **centrée**.
Si X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance $E(X)$, alors $X - E(X)$ est la variable aléatoire réelle centrée associée à X.

Proposition 9. Positivité de l'espérance $*$
Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.

- Si X est positive, i.e., pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.
- Si de plus $E(X) = 0$ alors X est presque sûrement nulle, i.e. $P(X = 0) = 1$.

Proposition 10. Croissance de l'espérance $*$
Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance.
Si $X \leq Y$, i.e., pour tout $\omega \in \Omega$ $X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème 4. Théorème de transfert
Soient X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i \; ; \; i \in \mathbb{N}\}$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum g(x_i) P(X = x_i)$ est absolument convergente. Dans ce cas

$$E(g(X)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g(x_i) P(X = x_i)$$

3.2 Variance et moments d'ordre supérieur

Définition 7. Soient X une variable aléatoire réelle et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un **moment d'ordre** r si X^r admet une espérance. Et dans ce cas on note $m_r(X) = E(X^r)$.

Proposition 11. $*$
Si une variable aléatoire X admet un moment d'ordre r alors, pour tout entier $k \leq r$, elle admet une moment d'ordre k.

Définition 8. On dit qu'une variable aléatoire réelle X admet une **variance** si la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ est bien définie et admet une espérance. Dans ce cas :

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

Théorème 5. Formule de Koenig-Huygens $*$
Soit X une variable aléatoire. X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Proposition 12. Pour toute variable aléatoire discrète X admettant un moment d'ordre 2 on a $V(X) \geq 0$. De plus si $V(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.

Théorème 6. $*$
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda X + \mu$ admet un moment d'ordre 2 et

$$V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X)$$

Définition 9. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. On appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Définition 10. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. On dit qu'elle est **centrée réduite** si $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.
Si X est une variable aléatoire réelle admettant une variance non nulle, alors $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 Des inégalités importantes

Les deux résultats sont valables pour des variables aléatoires réelles quelconques.

Théorème 7. Inégalité de Markov $*$

Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance. On a

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}}.$$

Théorème 8. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev $*$
Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2.

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

5 Lois usuelles

5.1 Les lois finies

5.1.1 La loi uniforme

Définition 11. Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![a, b]\!] \text{ et } \forall k \in [\![a, b]\!], P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$

Exemple Une urne contient n boules numérotées. On en tire une au hasard. La variable X est égale au numéro de la boule tirée.

Proposition 13. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ alors elle admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{a + b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b - a)(b - a + 2)}{12}$$

5.1.2 La loi de Bernoulli

Définition 12. Soit $p \in]0, 1[$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p\ ,\ P(X = 0) = 1 - p$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Exemple Toute épreuve à deux issues : succès et échec. X est la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Proposition 14. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$. X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p)$$

5.1.3 La loi binomiale

Définition 13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres (n,p) si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Exemple On considère une succession de n épreuves aléatoires dont les résultats sont indépendants, chacune ayant deux issues appelées succès (de proba p) et échec (de proba $1-p$). X est le nombre total de succès dans ces n épreuves.

Proposition 15. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

5.1.4 La loi hypergéométrique (HP)

Définition 14. Soient $(n,N) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leq n \leq N$ et $p \in]0,1[$ tel que Np soit un entier. On pose $q = 1-p$. On dit que X suit le loi hypergéométrique de paramètres (N,n,p) si

$$X(\Omega) = [\![\max(0, n-Nq), \min(n, Np)]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![\max(0,n-Nq), \min(n,Np)]\!], P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$.

Exemple On tire sans remise n boules dans une urne contenant Np boules blanches et Nq boules noires. X est le nombre de boules blanches obtenues.

Proposition 16. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$. X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$$

5.2 Les lois infinies

5.2.1 La loi géométrique

Définition 15. Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ si
$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ P(X=k) = pq^{k-1}$$
On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

Exemple On effectue une infinité de lancers d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p et celle d'obtenir face est q. X est le rang d'apparition du premier pile.

Remarque C'est un modèle discret pour la durée de vie d'une particule radioactive.

Proposition 17. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. X admet une espérance et une variance :
$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Proposition 18. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = q^k$.
- Pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $P(X > k+\ell) = P(X > k)P(X > \ell)$.
  On en déduit que $P(X > k+\ell | X > k) = P(X > \ell)$: on dit que le processus est « sans mémoire ».

Proposition 19. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est la fonction :
$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-q^k & \text{si } k \leq x < k+1\ ,\ k \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarque Considérons Y le nombre d'échecs avant d'obtenir le premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes toutes de paramètre p. Alors $\mathrm{Im}Y = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = pq^k$. On dit que Y suit une **loi géométrique à valeurs dans** $\mathbb{N}$. Dans ce cas $Y+1$ suit une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a $E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$ et $V(Y) = V(Y+1) = \frac{q}{p^2}$.

5.2.2 La loi de Poisson

Définition 16. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ si
$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \ P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Exemple C'est une loi limite de la loi binomiale de paramètre (n, p) quand np tend vers λ pour n qui tend vers $+\infty$ et p proche de 0. Elle sert à modéliser par exemple le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une période donnée, ou encore le nombre de voitures passant à un péage pendant une période donnée...

Proposition 20. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$