Lycée Sainte Geneviève
BCPST 2

Chapitre 4 : Applications linéaires. Matrices.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

1.1 Définition

Définition 1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

- On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Une application linéaire de E dans lui-même est appelé un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Remarque Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

1.2 Propriétés des ensembles d'applications linéaires

Théorème 1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. L'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathcal{L}(E, F)$, est un $\mathbb{K}$-ev.

Proposition 1. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition 2. Si f et g sont des applications linéaires de $\mathcal{L}(E, F)$ et u et v des applications linéaires de $\mathcal{L}(F, G)$. Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a

$$u \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda(u \circ f) + \mu(u \circ g) \quad \text{et} \quad (\lambda u + \mu v) \circ f = \lambda(u \circ f) + \mu(v \circ f)$$

Théorème 2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. L'ensemble des endomorphismes de E, $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 2. Soit u un endomorphisme de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u^n par :

$$u^0 = \mathrm{Id}_E \ \text{ et } \ u^{n+1} = u \circ u^n$$

Théorème 3. Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $\underline{f \circ g = g \circ f}$ alors les deux égalités suivantes sont vérifiées :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \qquad \text{(binôme de Newton)}$$

$$f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}$$

Attention dans ces deux égalités les puissances désignent des compositions !

Définition 3. Un endomorphisme de E bijectif est appelé un **automorphisme de** E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Proposition 3. La composition est une loi de composition interne de $\mathcal{GL}(E)$. Autrement dit la composition de deux automorphismes de E est un automorphisme de E.

1.3 Image et surjectivité

Définition 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **image de** u, notée $\mathrm{Im}u$ l'ensemble des éléments de F qui ont (au moins) un antécédent par u dans E, i.e. $\mathrm{Im}u = \{y \in F\ ;\ \exists x \in E\ ;\ y = u(x)\} = \{u(x)\ ,\ x \in E\}$.

Proposition 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. $\mathrm{Im}u$ est un sous-ev de F.

Théorème 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}u = F$.

Proposition 5. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Si on note $f_1 = u(e_1),\dots,f_p = u(e_p)$ alors $(f_1,\dots,f_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}u$.

Théorème 5. Soient $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $(f_1,\dots,f_p)$ une famille quelconque de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ qui vérifie :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ u(e_i) = f_i$$

1.4 Noyau et injectivité

Définition 5. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau de** u, notée $\operatorname{Ker} u$ l'ensemble $\{x \in E\ ;\ u(x) = 0_F\}$.

Proposition 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. $\operatorname{Ker} u$ est un sous-ev de E.

Théorème 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Proposition 7. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Si on note $f_1 = u(e_1), \ldots, f_p = u(e_p)$ alors u est injective si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre de F.

1.5 Isomorphismes

Définition 6.

- Une application linéaire bijective de E vers F est appelée un **isomorphisme** de E dans F.
- Si E et F sont deux espaces vectoriels tels qu'il existe un isomorphisme de E dans F alors on dit que E et F sont **isomorphes**.

Proposition 8. Si u est un isomorphisme de E dans F alors sa bijection réciproque est un isomorphisme de F dans E (elle est en particulier linéaire).

Théorème 7. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.
- E et F sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

2 Rang

2.1 Théorème du rang

Définition 7. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs. On appelle **rang de cette famille** et on note $\operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_p)$ la dimension de $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Définition 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, on appelle **rang de u** et on note $\operatorname{rg}(u)$ la dimension de $\operatorname{Im} u$.

Théorème 8. Théorème du rang
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. On a

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{rg}(u)$$

2.2 Premières conséquences du théorème du rang

Théorème 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie.

- u est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = \dim E$
- u est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = \dim F$ (indépendant du théorème du rang)

Théorème 10. Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On a

$$u \text{ injective } \Longleftrightarrow u \text{ surjective } \Longleftrightarrow u \text{ bijective}$$

3 Représentation matricielle d'une application linéaire

3.1 Matrice d'une famille de vecteurs et d'une application linéaire

Définition 9. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ on note $(a_{ij})_{1\leq i\leq n}$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, i.e $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. La matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est appelée la **matrice de la famille de vecteurs** $(u_1, \dots, u_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$ et notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

Remarque Si $u \in E$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est la colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 10. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respective p et n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice de la famille $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_p))$ de vecteurs de F dans la base $\mathcal{C}$.
Si on note (a_{ij}) les coefficients de cette matrice, on lit dans la j-ième colonne les coordonées de $u(e_j)$: $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}f_i$.
Si $E = F$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ au lieu de noter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Remarque Inversement à une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ on peut associer canoniquement une application linéaire $\varphi_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par :

$$\forall X \in \mathbb{K}^p, \varphi_A(X) = AX$$

3.2 Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Proposition 9. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respective p et n. Alors

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

Théorème 11. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respective p et n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. L'application $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme.

Remarque On en déduit, par exemple, que pour tout $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$

Théorème 12.

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respective p et n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
   Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$ et $y \in F$. On leur associe $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors l'équivalence entre les deux écritures vectorielles et matricielles suivantes :
   $$y = u(x) \Longleftrightarrow Y = AX$$
2. Soient E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$. Soient $f \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$ et $g \in \mathcal{L}(E_2,E_3)$. On a
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$$

3.3 Endomorphismes et matrices carrées

Proposition 10. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme

Théorème 13. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $\underline{AB = BA}$ alors les deux formules suivantes sont vérifiées :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$$

Théorème 14. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On a

$$u \text{ est bijective si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \text{ est inversible}$$

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\right)^{-1}$

Remarque Ceci inclus le cas des endormorphismes où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

3.4 Rang d'une matrice

Définition 11. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On note φ_A l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A. Le rang de φ_A est égal au rang de la famille des vecteurs colonnes de A et c'est cette valeur commune qu'on appelle **rang de la matrice** A et qu'on note $\mathrm{rg}(A)$

Théorème 15. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E, on a $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\right)$

Théorème 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$

Théorème 17. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. A et sa transposée, A^T, ont le même rang.

4 Changement de base

Définition 12. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$** notée $P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$.
Autrement dit, dans les colonnes de $P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2}$, on met les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}_2$ exprimées dans l'ancienne base $\mathcal{B}_1$.

Proposition 11. Propriétés des matrices de passage
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ trois bases de E.

1. On peut voir une matrice de passage comme la matrice représentative de Id_E :
$$P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_E)$$
(**Attention au changement d'ordre des deux bases !!**)
2. Une matrice de passage est toujours inversible. Et $\left(P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}_2 \mapsto \mathcal{B}_1}$
3. $P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2} P_{\mathcal{B}_2 \mapsto \mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_3}$

Théorème 18. Changement de base pour un vecteur
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Soit x un vecteur de E.
On note $X_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $X_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(x)$ (matrices colonnes) et $P = P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2}$. On a alors
$$X_1 = PX_2 \quad \text{ou encore} \quad X_2 = P^{-1}X_1$$

Théorème 19. Changement de base pour une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ deux bases de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1}(f)$ et $A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2}(f)$ ainsi que $P = P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2}$ et $Q = P_{\mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2}$. On a

$$A_1 = QA_2P^{-1} \quad \text{ou encore} \quad A_2 = Q^{-1}A_1P$$

Corollaire. Cas d'un endomorphisme
Si $f \in \mathcal{L}(E)$, et si on note $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$ ainsi que $P = P_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2}$, alors :

$$A_1 = PA_2P^{-1} \quad \text{ou encore} \quad A_2 = P^{-1}A_1P$$

Définition 13. Deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Proposition 12. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles sont des matrices représentatives d'un même endomorphisme.

Proposition 13. Soient deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ semblables. On note $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables et $A^k = PB^kP^{-1}$
2. A et B ont le même rang.
3. A et B ont la même trace. (HP)